Μάθημα 8ο

09/12/15

Κατανομή του $\max X_i$ και $\min X_i$.

Έστω $F_{X_i}(x_i)$ η α.σ.κ. της X_i, $i=1,\dots,n$ όπου $X_1,\dots,X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $Y=\max X_i$ και $Z=\min X_i$

① Κατανομή του $Y=\max X_i$

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(\max X_i\leq y)=P(X_1\leq y,\dots,X_n\leq y)$$
$$=P(X_1\leq y)\cdots P(X_n\leq y) \quad \text{λόγω ανεξ. των } X_i$$
$$=F_{X_1}(y)\cdots F_{X_n}(y)$$

$$F_{\max X_i}(y)=F_{X_1}(y)\cdots F_{X_n}(y)$$

Έτσι, $f_{\max X_i}(y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{X_1}(y)\cdots F_{X_n}(y)}{F_{X_i}(y)}\cdot f_{X_i}(y)$, $y\in\mathbb{R}$

Αν X_i είναι και ισόνομες με την τ.μ. X (με ασκ $F_X(x)$) τότε: $F_{\max X_i}(y)=\left[F_X(y)\right]^n$ και

και

$$f_{\max X_i}(y) = n\left[F_X(y)\right]^{n-1} \cdot f_X(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

② Κατανομή του $Z = \min X_i$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(\min X_i \le z) = 1 - P(\min X_i > z) = 1 - P(X_1 > z, \dots, X_n > z)$$

$$= 1 - P(X_1 > z) \cdots P(X_n > z) \quad \text{λόγω ανεξ. των } X_i$$

$$= 1 - \left[1 - P(X_1 \le z)\right] \cdots \left[1 - P(X_n \le z)\right] =$$

$$= 1 - \left[1 - F_{X_1}(z)\right] \cdots \left[1 - F_{X_n}(z)\right]$$

$$\rightsquigarrow F_{\min X_i}(z) = 1 - \left[1 - F_{X_1}(z)\right] \cdots \left[1 - F_{X_n}(z)\right]$$

Έτσι, $f_{\min X_i}(z) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\left[1 - F_{X_1}(z)\right] \cdots \left[1 - F_{X_n}(z)\right]}{1 - F_{X_i}(z)} \cdot f_{X_i}(z), \quad z \in \mathbb{R}.$

Αν X_i είναι και ισόνομες με την τ.μ. X (με α.σ.κ. $F_X(z)$) τότε: $F_{\min X_i}(z) = 1 - \left[1 - F_X(z)\right]^n$

και

$$f_{\min X_i}(z) = n\left[1 - F_X(z)\right]^{n-1} \cdot f_X(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

1) Χρόνος ζωής λάμπας $\sim$ Εκθ($\mu = 1000h$), $X_i \equiv$ χρόνος ζωής καθεμιάς, $n = 100$.

$f_X(x) = \dfrac{1}{1000} e^{-x/1000}, \quad x > 0$ και $F_X(x) = 1 - e^{-x/1000}, \quad x > 0.$

$Z = \min X_i$

$$f_Z(z) = n\left[1 - F_X(z)\right]^{n-1} f_X(z) = 100 \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-x/1000}\right)\right]^{99} \cdot \frac{1}{1000} e^{-x/1000} =$$

$$= \frac{1}{10} e^{-99x/1000} e^{-x/1000} = \frac{1}{10} e^{-x/10}, \quad x > 0.$$

Άρα, $\min X_i \sim$ Εκθ.($\mu = 10h$)

2) $X_i \sim U(0,\theta)$, $i=1,\dots,n$

$f_X(x) = \frac{1}{\theta}$, $0<x<\theta$ και $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x/\theta & , 0<x<\theta \\ 1 & , x\geq\theta. \end{cases}$

$F_{\max X_i}(y) = \left[F_X(y)\right]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$, $0<y<\theta$ και $f_{\max X_i}(y) = n\,\frac{y^{n-1}}{\theta^n}$, $0<y<\theta$.

$= 1$, $y\geq\theta$

$F_{\min X_i}(z) = 1-\left[1-F_X(z)\right]^n = 1-\left[1-\frac{z}{\theta}\right]^n$, $0<z<\theta$ και $f_{\min X_i}(z) = n\left[1-\frac{z}{\theta}\right]^{n-1}\frac{1}{\theta}$, $0<z<\theta$.

$= 1$, $z\geq\theta$.

Σύγκλιση τ.μ. και κατανομών

1. Markov: Εάν η τ.μ. X είναι μη αρνητική, τότε $\forall\varepsilon>0$, $P(X\geq\varepsilon)\leq\frac{E(X)}{\varepsilon}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $E(X) = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\varepsilon x f(x)\,dx + \int_\varepsilon^\infty x f(x)\,dx$

$\geq \int_\varepsilon^\infty x f(x)\,dx > \int_\varepsilon^\infty \varepsilon f(x)\,dx = \varepsilon P(X\geq\varepsilon)$.

$E(X) < \varepsilon P(X\geq\varepsilon) \Rightarrow P(X\geq\varepsilon) < \frac{E(X)}{\varepsilon}$.

2. Chebyshev: Εάν η τ.μ. X έχει $\mu=E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$ τότε για $\varepsilon>0$, $P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Markov: $X\to(X-\mu)^2$, $\varepsilon\to\varepsilon^2$

$P\left[(X-\mu)^2\geq\varepsilon^2\right]\leq\frac{E(X-\mu)^2}{\varepsilon^2} \rightsquigarrow P\left[|X-\mu|\leq\varepsilon\right]\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ γιατί $\left[(X-\mu)^2\geq\varepsilon^2\right]\Leftrightarrow\left[|X-\mu|\geq\varepsilon\right]$

Σύγκλιση κατά πιθανότητα

Έστω ότι έχουμε μια ακολουθία τ.μ. X_n, $n=1,2,\dots$ ορισμένες σε ένα δειγματικό χώρο S με κάποια κατανομή και έστω τ.μ. X ορισμένη στον ίδιο δειγματοχώρο S

ΟΡΙΣΜΟΣ:

1. (Ισχυρή σύγκλιση) Η ακολουθία X_n συγκλίνει στην τ.μ. X με πιθανότητα 1 αν $P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$ και συμβολίζουμε με $X_n \xrightarrow{P=1} X$ ή $X_n \xrightarrow[\alpha.\delta.]{\sigma.\beta} X$ ή $X_n \xrightarrow[\alpha.\delta.]{\sigma.\pi} X$ (σχεδόν βέβαια >> πάντα)

2. (Ασθενής σύγκλιση) Η ακολουθία X_n συγκλίνει στην τ.μ. X κατά πιθανότητα αν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει ότι:

$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \leq \varepsilon\} = 1$ ή $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$.

Συμβολίζουμε: $X_n \xrightarrow{P} X$ ή $X_n \to X$

και ισχύει: $X_n \xrightarrow{P=1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

$X_n \xrightarrow{P=1} X$ ανν $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

1) Έστω X_n ακολουθία ανεξ. μεταβλητών Bernoulli (p) δηλ. $P(X_i = 1) = p$ και $P(X_i = 0) = 1 - p$ $\forall i$.

Αν $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ν.δ.ο. $\frac{X}{n} \xrightarrow{P} p$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Chebyshev: $X \sim Bin(np)$, $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p) \to E\left(\frac{X}{n}\right) = p$, $Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$.

$P\left[\left|\frac{X}{n} - p\right| > \varepsilon\right] \leq P\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \left(= \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\right) \to$

$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0 \to \frac{X}{n} \xrightarrow{P} p$.

2) Έστω X_n ακολ. τ.μ. $X_n = 0$ με πιθανότητα $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
$X_n = 1$ >> $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ν.δ.ο. $X_n \xrightarrow{P} 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1\right.$ άρα $\left.P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1 \to X_n \xrightarrow{P=1} 0\right)$

Markov: $E(X_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ και $P(X_n>\varepsilon)\leq P(X_n\geq\varepsilon)\leq \frac{E(X_n)}{\varepsilon}$

ή $P(X_n>\varepsilon)\leq \frac{1}{2^n\cdot\varepsilon}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, άρα $X_n\xrightarrow{P} 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

3) Έστω X_n ακολ. ανεξ. και ισόνομων τ.μ. με $f_X(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}$, $x>0$.

Ν.δ.ο. $\overline{X}\xrightarrow{P}\lambda$.

$E(X)=\lambda$, $Var(X)=\lambda^2$
$E(\overline{X})=\lambda$, $Var(\overline{X})=\frac{\lambda^2}{n}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Chebyshev: $P(|\overline{X}-\lambda|>\varepsilon)\leq\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)=\frac{\lambda^2}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\to\overline{X}\xrightarrow{P}\lambda$.

4) Έστω X_n ακολουθία τ.μ. με $P(X_n=n^2)=\frac{1}{n}$ και $P(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$

Ν.δ.ο. $X_n\xrightarrow{P}0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $P(X_n>\varepsilon)=P(X_n=n^2)=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, άρα $X_n\xrightarrow{P}0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1: Έστω X_n ακολουθία τ.μ. με $\lim_{n\to\infty}Var(X_n)=0$

i) Αν $E(X_n)=\mu$ $\forall n$, τότε $X_n\xrightarrow{P}\mu$

ii) Αν $\lim_{n\to\infty}E(X_n)=\mu$, τότε $X_n\xrightarrow{P}\mu$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

i) Chebyshev: $P[|X_n-E(X_n)|\geq\varepsilon]\leq\frac{Var(X_n)}{\varepsilon}$, $\varepsilon>0$

$\to P[|X_n-\mu|\geq\varepsilon]\leq\frac{Var(X_n)}{\varepsilon}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}\mu$

ii) Markov: $P[|X_n-\mu|\geq\varepsilon]=P[(X_n-\mu)^2\geq\varepsilon^2]\leq\frac{E(X_n-\mu)^2}{\varepsilon^2}$

$$=\frac{E(X_n-EX_n+EX_n-\mu)^2}{\varepsilon^2}=\frac{Var(X_n)+(EX_n-\mu)^2}{\varepsilon^2}\to 0.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Παραδ. 1, $E\left(\frac{X}{n}\right)=p$ και (i) Παραδ. 3, $E(\bar{X})=\lambda$

και

Παραδ. 2, $E(X_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ και (i) και (i)

ΘΕΩΡΗΜΑ 2: Έστω $X_n \xrightarrow{P} \mu_1$ και $Y_n \xrightarrow{P} \mu_2$ τότε:

i) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} \mu_1 \pm \mu_2$, ii) $X_n Y_n \xrightarrow{P} \mu_1 \mu_2$, iii) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Slutsky-Fréchet:
Εάν $X_n \xrightarrow{P} X$ και g συνεχής συνάρτηση τότε $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4:
i) $X_n \xrightarrow{P} X$ ανν $X_n - X \xrightarrow{P} 0$
ii) Εάν $X_n \xrightarrow{P} X$ και $Y_n \xrightarrow{P} Y$ τότε: α) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} X \pm Y$
β) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$

Σύγκλιση κατά κατανομή ή κατά νόμο (Ασθενής σύγκλιση)

ΟΡΙΣΜΟΣ:
3) Η ακολουθία τ.μ. X_n συγκλίνει στην τ.μ. X κατά κατανομή ή κατά νόμο ($X_n \xrightarrow{d} X$, $X_n \xrightarrow{K} X$) αν $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ σε κάθε σημείο x όπου η $F_X(\cdot)$ είναι συνεχής.

Είναι: $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5: Η ακολουθία X_n συγκλίνει στην τ.μ. X κατά κατανομή αν $\lim_{n\to\infty} m_{X_n}(t) = m_X(t)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
5) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξ. και ισόνομες τ.μ. με $f_X(x)=\frac{1}{\theta}$, $0<x<\theta$ και $Y_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$

Να βρεθεί η οριακή κατανομή του Y_n. $\left(F_X(x) = \begin{cases} x/\theta, & 0<x<\theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases} \right)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n, \quad 0<y<\theta$

$= 1, \quad y \geq \theta.$

Άρα $\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{y}{\theta}\right)^n = 0, \quad 0<y<\theta$

$= 1, \quad y \geq \theta.$

Άρα, $\max(X_1, \dots, X_n) = Y_n \xrightarrow{d} Y$ με $P(Y=\theta)=1$ και $P(Y\neq\theta)=0$.

6) Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. και ισόνομες $N(0,\sigma^2)$ τ.μ. και $Z_n = \sqrt{n}\,\overline{X_n} = \sqrt{n}\,\frac{\sum^n X_i}{n}$.
Ν.δ.ο. $Z_n \xrightarrow{d} X$, $X \sim N(0,\sigma^2)$.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $X_i \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow \overline{X_n} = \frac{\sum_1^n X_i}{n} \sim N(0, \sigma^2/n) \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_n = \sqrt{n}\,\overline{X_n} \sim N(0,\sigma^2)$. Άρα $Z_n \xrightarrow{d} X$, $X \sim N(0,\sigma^2)$

7) Σύγκλιση της Διωνυμικής προς την κατανομή Poisson ($np=\lambda$, $n\to\infty$)

$X_n \sim Bin(n,p) \equiv P_{X_n}(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,\dots,n.$

$X \sim Pois(\lambda) \equiv P_X(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$

i) α.σ.κ. $F_{X_n}(x) = \sum_{y=0}^{[x]} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \quad x>0$ και $F_X(x) = \sum_{y=0}^{[x]} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, \quad x>0.$

Είναι $\lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} F_{X_n}(x) = \sum_{y=0}^{[x]} \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} P_{X_n}(y,n,p) = \sum_{y=0}^{[x]} P_X(y,\lambda) \rightarrow$

$X_n \xrightarrow{d} X$ (βλ. (ii)).

ii) σ.π. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$\left\{\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(x-1)}{n}\right\} \qquad \left\{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{(x-1)}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-x+1)}^{x\text{-όροι}}}{n^x}}_{\to 1}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\,1\cdot 1\, e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad \text{δηλ. } X_n \xrightarrow{d} X,\ X\sim P(\lambda).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y \;\Big\|\; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \;\Big\|\; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{-x\cdot 0} = 1$$

iii) Ροπογεννήτρια

$$m_{X_n}(t) = (q + pe^t)^n = (1-p+pe^t)^n = (1+p(e^t-1))^n$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}} m_{X_n}(t) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=\lambda}}\left[1+\frac{\lambda(e^t-1)}{n}\right]^n = e^{\lambda(e^t-1)}$$

δηλ. $X_n \xrightarrow{d} X$, $X\sim Pois(\lambda)$.